

Κεφάλαιο 3

Προτυποποίηση συστημάτων: εξισώσεις κατάστασης

3.1 Εισαγωγή

Οι περιγραφές εισόδου – εξόδου ενός συστήματος έχουν ως κύριο χαρακτηριστικό τη σύνδεση της εξόδου με την είσοδο, χωρίς να λαμβάνουν υπόψη το εσωτερικό του, δηλαδή τη δομή του. Ωστόσο, σημαντικό μέρος της πληροφορίας σχετικά με το σύστημα βρίσκεται σε φυσικές ποσότητες, οι οποίες, χωρίς να είναι είσοδοι ή εξόδοι, διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στη λειτουργία του συστήματος: αυτές είναι οι **μεταβλητές κατάστασης**. Ειδικότερα, οι μεταβλητές κατάστασης συνιστούν το μικρότερο (σε αριθμό στοιχείων) σύνολο γραμμικά ανεξάρτητων μεταβλητών $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$, που περιγράφουν φυσικές ποσότητες του συστήματος και που απαιτούνται για τον πλήρη προσδιορισμό της μελλοντικής συμπεριφοράς του, όταν είναι γνωστές οι αρχικές τιμές τους, δηλαδή οι $x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)$, σε μια αρχική χρονική στιγμή $t = t_0$, καθώς και οι είσοδοι του συστήματος. Με άλλα λόγια, οι μεταβλητές κατάστασης κατά τη χρονική στιγμή $t = t_0$ περιέχουν όλη την πληροφορία που απαιτείται για τον προσδιορισμό των μελλοντικών εξόδων του συστήματος, δηλαδή για $t > t_0$, όταν είναι γνωστές οι είσοδοί του για $t > t_0$.

Οι μεταβλητές κατάστασης αποτελούν τις συνιστώσες του **διανύσματος κατάστασης**

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

το οποίο έχει διάσταση $n \times 1$. Το διάνυσμα και οι μεταβλητές κατάστασης είναι συναρτήσεις του χρόνου. Συχνά όμως, για απλούστευση, δεν αναγράφεται η εξάρτησή τους από το χρόνο και έτσι γράφουμε μόνο x_1, x_2, \dots, x_n .

Με βάση τις μεταβλητές κατάστασης, το γραμμικό, χρονικά αμετάβλητο σύστημα πολλών εισόδων – πολλών εξόδων μοντελοποιείται με τη μορφή ενός συστήματος n γραμμικών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης με σταθερούς συντελεστές της μορφής

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (3.2)$$

Αυτές ονομάζονται **εξισώσεις κατάστασης** και η αντίστοιχη περιγραφή είναι η **περιγραφή κατάστασης**. Η έξοδος του συστήματος προσδιορίζεται από ένα σύστημα r αλγεβρικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές της μορφής

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (3.3)$$

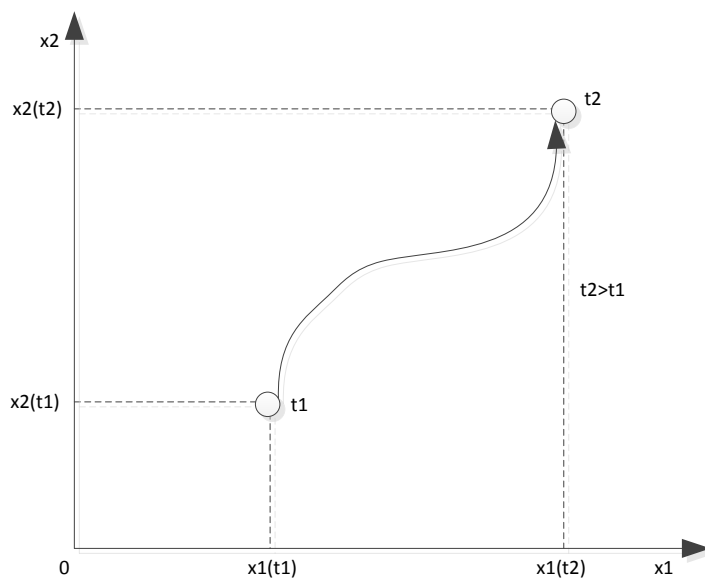
που λέγονται **εξισώσεις εξόδου**. Στην περιγραφή (3.2), (3.3) $u(t)$ και $y(t)$ είναι τα **διανύσματα εισόδου και εξόδου** διαστάσεων $m \times 1$ και $r \times 1$, αντίστοιχα

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}, \quad y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_r(t) \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Οι πίνακες A , B , C και D έχουν σταθερά στοιχεία και είναι κατάλληλης διάστασης. Ειδικότερα, ο A λέγεται **πίνακας κατάστασης** και έχει διάσταση $n \times n$. Ο B λέγεται **πίνακας εισόδου** και έχει διάσταση $n \times m$. Ο C λέγεται **πίνακας εξόδου** και έχει διάσταση $r \times n$. Τέλος, ο D λέγεται **απ' ευθείας πίνακας** και έχει διάσταση $r \times m$. Αν τα στοιχεία των πινάκων A , B , C και D είναι συναρτήσεις του χρόνου, τότε οι εξισώσεις (3.2), (3.3) με $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ και $D(t)$ δίνουν την περιγραφή ενός γραμμικού, **χρονικά μεταβαλλόμενου** συστήματος.

Ο διανυσματικός χώρος διάστασης n με συντεταγμένες τις μεταβλητές κατάστασης και παράμετρο το χρόνο λέγεται **χώρος κατάστασης**. Κάθε σημείο του χώρου αυτού ορίζει μια κατάσταση του συστήματος. Η χρονική μεταβολή του διανύσματος κατάστασης απεικονίζεται στο χώρο κατάστασης από μια **τροχιά**, της οποίας οι εξισώσεις είναι οι εξισώσεις κατάστασης με παράμετρο τον χρόνο.

Όπως αναφέρθηκε στο Κεφ. 2, τάξη ενός συστήματος είναι η τάξη του μαθηματικού μοντέλου του. Έτσι, στην περίπτωση που το σύστημα περιγράφεται στο χώρο κατάστασης, η τάξη του ισούται με τον αριθμό των μεταβλητών κατάστασης, που είναι και ο αριθμός των εξισώσεων κατάστασης.



Σχήμα 3.1. Τροχιά της κατάστασης συστήματος δύο μεταβλητών

3.2 Περιγραφή κατάστασης φυσικών συστημάτων

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζονται τα μοντέλα κατάστασης των φυσικών συστημάτων που μελετήθηκαν στο Κεφ. 2.

3.2.1 Μηχανικό σύστημα μετατόπισης

Θεωρούμε και πάλι το μηχανικό σύστημα που αποτελείται από μια μάζα m , ένα ελατήριο με σταθερά k και αποσβεστήρα με συντελεστή τριβής f , όπως στο Σχ. 2.9. Η δύναμη, που επιδρά στη μάζα, είναι η είσοδος u και η αντίστοιχη μετατόπιση είναι η έξοδος y . Όπως αναφέρθηκε στην παρ. 2.8.1, η διαφορική εξίσωση που περιγράφει το σύστημα είναι

$$my^{(2)}(t) + fy^{(1)}(t) + ky(t) = u(t) \quad (3.5)$$

και η συνάρτηση μεταφοράς του είναι

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{ms^2 + fs + k} \quad (3.6)$$

Θεωρώντας ως μεταβλητές κατάστασης τη μετατόπιση και την ταχύτητα, δηλαδή, $x_1(t) = y(t)$ και $x_2(t) = y^{(1)}(t)$, προκύπτουν οι εξισώσεις κατάστασης

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \quad (3.7)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{k}{m}x_1(t) - \frac{f}{m}x_2(t) + \frac{1}{m}u(t)$$

ή σε διανυσματική μορφή

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{f}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u(t) \quad (3.8)$$

Εφόσον το μέγεθος που μετράμε είναι η μετατόπιση, δηλαδή, $y(t) = x_1(t)$, η εξίσωση εξόδου θα είναι

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

3.2.2 Μηχανικό σύστημα περιστροφής

Το σύστημα περιστροφής αποτελείται από το φορτίο που περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω και γωνιακή επιτάχυνση a , υπό την επίδραση της ροπής T . Το φορτίο έχει ροπή αδρανείας J και χαρακτηρίζεται από την ιξώδη τριβή με συντελεστή f (Σχ. 2.10). Από τη μελέτη της παρ. 2.8.2 είναι γνωστό ότι η διαφορική εξίσωση του συστήματος είναι

$$T = J\omega^{(1)}(t) + f\omega(t) \quad (3.10)$$

και η συνάρτηση μεταφοράς του είναι

$$G(s) = \frac{\Omega(s)}{T(s)} = \frac{1}{Js + f} \quad (3.11)$$

Σημειώνεται ότι το σύστημα αυτό είναι 1^{ης} τάξης. Έστω η μεταβλητή κατάστασης $x_1(t) = \omega(t)$. Τότε η εξίσωση κατάστασης είναι

$$\dot{x}_1(t) = -\frac{f}{J}x_1(t) + \frac{1}{J}u(t) \quad (3.12)$$

όπου η είσοδος $u(t)$ είναι η ροπή T . Εφόσον το μετρούμενο μέγεθος είναι η γωνιακή ταχύτητα ω , η έξοδος θα είναι

$$y(t) = x_1(t) \quad (3.13)$$

3.2.3 Ηλεκτρικό δίκτυο

Έστω το ηλεκτρικό δίκτυο του Σχ.2.11. που αποτελείται από αυτεπαγωγή L , αντίσταση R και χωρητικότητα C . Από τη μελέτη της παρ. 2.8.3 είναι γνωστό ότι η διαφορική εξίσωση του συστήματος είναι

$$Li^{(1)}(t) + Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt = e_i, \text{ με } \frac{1}{C} \int i(t) dt = e_o \quad (3.14)$$

και η συνάρτηση μεταφοράς του δικτύου είναι

$$G(s) = \frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} \quad (3.15)$$

Το σύστημα αυτό είναι 2^{ης} τάξης και επομένως για την περιγραφή του απαιτούνται δύο μεταβλητές κατάστασης. Έστω $x_1(t) = \int i(t) dt$ και $x_2(t) = i(t)$. Τότε

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{1}{LC} x_1(t) - \frac{R}{L} x_2(t) + \frac{1}{L} u(t) \end{aligned} \quad (3.16)$$

Αν υποθεθεί ότι το μετρούμενο μέγεθος είναι το ηλεκτρικό ρεύμα, τότε η εξίσωση εξόδου θα είναι

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

3.2.4 Σερβομηχανισμός θέσης

Ο σερβομηχανισμός θέσης αποτελείται από ηλεκτρικό κινητήρα και φορτίο, του οποίου επιδιώκεται η σταθερή γωνιακή ταχύτητα. Η περιγραφή του μελετήθηκε στην παρ. 2.8.4. Η συνάρτηση μεταφοράς του είναι 2^{ης} τάξης

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{42.3}{s^2 + 7.7s + 42.3} \quad (3.18)$$

Έστω ότι λαμβάνονται οι μεταβλητές κατάστασης $x_1(t) = i_a(t)$, $x_2(t) = \omega(t)$ και $x_3(t) = \theta(t)$, όπου $\theta(t)$ η γωνιακή μετατόπιση και $\omega(t)$ η γωνιακή ταχύτητα του κινητήρα. Η περιγραφή κατάστασης είναι

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{K_b}{L_a} & \frac{nK_p K_1}{L_a} \\ \frac{K}{J_m} & -\frac{f_m}{J_m} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{K_p K_1}{L_a} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (3.19)$$

3.3 Μετασχηματισμοί εξισώσεων κατάστασης σε ειδικές μορφές

3.3.1 Μετασχηματισμός ομοιότητας

Η περιγραφή κατάστασης ενός συστήματος δεν είναι μοναδική: ανάλογα με το σύνολο μεταβλητών κατάστασης που επιλέγονται, είναι δυνατόν να έχουμε έναν αριθμό ισοδύναμων περιγραφών για το ίδιο σύστημα. Στη γενική περίπτωση, για περιγραφές της ίδιας διάστασης, οι μεταβλητές κατάστασης μιας επιλογής αποτελούν γραμμικό συνδυασμό των μεταβλητών κατάστασης μιας άλλης επιλογής. Αν, για παράδειγμα, δύο διαφορετικές επιλογές μεταβλητών κατάστασης ορίζουν τα διανύσματα κατάστασης $x(t)$ και $z(t)$, αυτά συνδέονται με τη γραμμική σχέση

$$x(t) = Tz(t) \quad (3.20)$$

όπου T είναι ένας **πίνακας γραμμικού μετασχηματισμού** διάστασης $n \times n$. Από την σχέση αυτή προκύπτει η περιγραφή

$$\dot{z}(t) = A^* z(t) + B^* u(t) \quad (3.21)$$

$$y(t) = C^* z(t) + D^* u(t)$$

που είναι ισοδύναμη της (3.2), (3.3). Μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι οι πίνακες των δύο περιγραφών συνδέονται με τις σχέσεις

$$\begin{aligned} A^* &= T^{-1}AT \\ B^* &= T^{-1}B \\ C^* &= CT \\ D^* &= D \end{aligned} \quad (3.22)$$

οι οποίες αποτελούν ένα **μετασχηματισμό ομοιότητας** μεταξύ των πινάκων των δύο περιγραφών. Σημειώνεται ότι ο μετασχηματισμός ομοιότητας ισχύει σε **κάθε** περίπτωση που ένα διάνυσμα κατάστασης προκύπτει από ένα άλλο μέσω ενός γραμμικού μετασχηματισμού. Σε κάθε περίπτωση, όμως, το σύστημα έχει τις ίδιες εισόδους και εξόδους: αυτό εξηγεί το γεγονός ότι η συνάρτηση μεταφοράς και το

χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος παραμένουν αναλλοίωτα, ανεξάρτητα από την επιλογή του πίνακα μετασχηματισμού T .

3.3.2 Κανονικές μορφές φάσης

Ένας από τους λόγους που χρησιμοποιούνται οι γραμμικοί μετασχηματισμοί είναι για να πάρουμε μοντέλα κατάστασης ειδικών μορφών. Η πιο συνηθισμένη είναι η **κανονική μορφή μεταβλητών φάσης**. Μεταβλητές φάσης λέγονται εκείνες οι μεταβλητές κατάστασης που συνδέονται με τις σχέσεις

$$\begin{aligned}x_1(t) &= y(t) \\x_2(t) &= y^{(1)}(t) \\x_3(t) &= y^{(2)}(t) \\&\vdots\end{aligned}\tag{3.23}$$

Τυπικό παράδειγμα μεταβλητών φάσης αποτελούν η θέση, η ταχύτητα και η επιτάχυνση. Στην κανονική μορφή φάσης οι πίνακες του μοντέλου κατάστασης έχουν τις παρακάτω ειδικές μορφές

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11}^* & A_{12}^* & \cdots & A_{1m}^* \\ A_{21}^* & A_{22}^* & \cdots & A_{2m}^* \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{m1}^* & A_{m2}^* & \cdots & A_{mm}^* \end{bmatrix}, \quad B^* = \begin{bmatrix} B_1^* \\ B_2^* \\ \vdots \\ B_m^* \end{bmatrix}\tag{3.24}$$

όπου οι υπο-πίνακες A_{ii}^* , A_{ij}^* έχουν τη μορφή

$$A_{ii}^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -(a_{ii}^*)_0 & -(a_{ii}^*)_1 & -(a_{ii}^*)_2 & \cdots & -(a_{ii}^*)_{\sigma_i-1} \end{bmatrix}\tag{3.25}$$

$$A_{ij}^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -(a_{ij}^*)_0 & -(a_{ij}^*)_1 & -(a_{ij}^*)_2 & \cdots & -(a_{ij}^*)_{\sigma_j-1} \end{bmatrix}\tag{3.26}$$

$$B_i^* = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & (b_i^*)_{i+1} & (b_i^*)_{i+2} & \cdots & (b_i^*)_m \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

όπου οι σ_i είναι ακέραιοι αριθμοί και $\sum_{i=1}^m \sigma_i = n$.

Όταν το σύστημα είναι μιας εισόδου, τότε η κανονική μορφή φάσης έχει την παρακάτω απλούστερη μορφή

$$A^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0^* & -a_1^* & -a_2^* & \cdots & -a_{n-1}^* \end{bmatrix}, \quad b^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

3.3.3 Υπολογισμός κανονικής μορφής φάσης συστήματος μιας εισόδου

Έστω το μοντέλο κατάστασης του συστήματος

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) \quad (3.29)$$

όπου b είναι το διάνυσμα εισόδου.

- Κατασκευάζουμε τον πίνακα

$$S = [b \quad Ab \quad A^2b \quad \cdots \quad A^{n-1}b] \quad (3.30)$$

- Αν ο S είναι αντιστρέψιμος, υπολογίζουμε τον αντίστροφο πίνακα S^{-1} . Έστω q η τελευταία γραμμή του S^{-1}
- Κατασκευάζουμε τον πίνακα

$$P = \begin{bmatrix} q \\ qA \\ qA^2 \\ \vdots \\ qA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

- Υπολογίζουμε τον αντίστροφο πίνακα P^{-1} . Τότε, ο πίνακας μετασχηματισμού είναι ο $T = P^{-1}$. Οι πίνακες του μετασχηματισμένου συστήματος κανονικής μορφής φάσης δίνονται από τις γνωστές σχέσεις

$$\begin{aligned} A^* &= T^{-1}AT \\ b^* &= T^{-1}b \end{aligned} \quad (3.32)$$

Παράδειγμα 3.3.1

Έστω το σύστημα $\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$ με πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ζητείται να βρεθεί η περιγραφή στην κανονική μορφή φάσης.

Λύση

Έχουμε

$$S = [b \quad Ab] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Η τελευταία γραμμή του S^{-1} είναι

$$q = [-1 \quad 1]$$

Άρα,

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = T$$

Οπότε, οι μετασχηματισμένοι πίνακες είναι

$$A^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad b^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3.3.4 Υπολογισμός κανονικής μορφής φάσης συστήματος πολλών εισόδων

Έστω το μοντέλο κατάστασης του συστήματος

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (3.33)$$

- Κατασκευάζουμε τον πίνακα

$$S = \begin{bmatrix} b_1 & Ab_1 & \cdots & A^{\sigma_1-1}b_1 & b_2 & Ab_2 & \cdots & A^{\sigma_2-1}b_2 & \cdots & A^{\sigma_m-1}b_m \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

$$\text{όπου } \sum_{i=1}^m \sigma_i = n.$$

- Αν η επιλογή των σ_i είναι τέτοια ώστε ο πίνακας S να είναι αντιστρέψιμος, τότε υπάρχει ο πίνακας μετασχηματισμού $T = P^{-1}$, όπου

$$P = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{\delta_1} \\ q_{\delta_1}A \\ \vdots \\ q_{\delta_1}A^{\sigma_1-1} \\ q_{\delta_2} \\ q_{\delta_2}A \\ \vdots \\ q_{\delta_2}A^{\sigma_2-1} \\ \vdots \\ q_{\delta_m} \\ q_{\delta_m}A \\ \vdots \\ q_{\delta_m}A^{\sigma_m-1} \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

όπου q_{δ_k} είναι η δ_k γραμμή του S^{-1} και τα δ_k προκύπτουν ως εξής:

$$\delta_k = \sum_{i=1}^k \sigma_i, \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (3.36)$$

Παράδειγμα 3.3.2

Έστω το σύστημα $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ με πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ζητείται να μετασχηματιστεί στην κανονική μορφή φάσης.

Λύση

Έχουμε

$$S = [b_1 \quad Ab_1 \quad b_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Εδώ ισχύει $\sigma_1 = 2$ και $\sigma_2 = 1$, οπότε $\sigma_1 + \sigma_2 = 3 = n$. Επίσης ισχύει $\delta_1 = \sigma_1 = 2$, $\delta_2 = \sigma_1 + \sigma_2 = 3$, άρα θα χρησιμοποιηθούν, αντίστοιχα, η δεύτερη και η τρίτη γραμμή του S^{-1} , δηλαδή η q_2 και η q_3 . Άρα, έχουμε

$$P = \begin{bmatrix} q_2 \\ q_3 A \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = T^{-1}$$

$$T = P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Οι πίνακες της κανονικής μορφής φάσης είναι

$$A^* = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B^* = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C^* = CT = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D^* = D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3.3.5 Μετάβαση από την κανονική μορφή φάσης στη διαγώνια μορφή

Έστω ότι ένα σύστημα μιας εισόδου – μιας εξόδου είναι στην κανονική μορφή φάσης και ζητείται να μετασχηματιστεί έτσι ώστε ο πίνακας A^* να είναι διαγώνιος. Αποδεικνύεται ότι στην περίπτωση αυτή ο πίνακας μετασχηματισμού T έχει τη μορφή

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \lambda_3^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

όπου λ_i είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα A^* . Τότε, ο A^* μετασχηματίζεται μέσω της σχέσης

$$\Lambda = T^{-1} A^* T \quad (3.38)$$

όπου Λ είναι ο διαγώνιος πίνακας των ιδιοτιμών λ_i .

Παράδειγμα 3.3.3

Ζητείται να διαγωνοποιηθεί ο πίνακας

$$A^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{bmatrix}$$

Λύση

Οι ιδιοτιμές του A^* είναι οι $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$. Ο πίνακας μετασχηματισμού είναι

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

Επομένως,

$$\Lambda = T^{-1} A^* T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

3.3.6 Μετάβαση από την διαφορική εξίσωση στην κανονική μορφή φάσης

Έστω ένα σύστημα με είσοδο $u(t)$, έξοδο $y(t)$ και έστω ότι αυτό περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1y^{(1)}(t) + a_0y(t) = u(t) \quad (3.39)$$

Ορίζουμε τις μεταβλητές φάσης

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y(t) \\ x_2(t) &= y^{(1)}(t) \\ x_3(t) &= y^{(2)}(t) \\ &\vdots \\ x_n(t) &= y^{(n-1)}(t) \end{aligned} \quad (3.40)$$

Τότε, η περιγραφή του συστήματος στο χώρο κατάστασης κανονικής μορφής φάσης είναι

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + bu(t) \\ y(t) &= cx(t) \end{aligned} \quad (3.41)$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0] \quad (3.42)$$

3.4 Μετάβαση από περιγραφή σε περιγραφή

Σε ένα σύστημα, είναι πολύ σημαντικό να μπορούμε, με απλές και εύχρηστες μεθόδους, να αλλάξουμε τη μορφή του μοντέλου του. Για παράδειγμα, από μια περιγραφή εισόδου – εξόδου να παίρνουμε την περιγραφή στο χώρο κατάστασης και αντίστροφα. Αυτό γίνεται για λόγους, είτε θεωρητικούς, είτε υπολογιστικούς (καταλληλότερη περιγραφή για την επίλυση ενός συγκεκριμένου προβλήματος). Στη συνέχεια θα εξετάσουμε διάφορους τρόπους μετάβασης από περιγραφή σε περιγραφή.

3.4.1 Μετάβαση από τη διαφορική εξίσωση στη συνάρτηση μεταφοράς

Έστω ότι ένα σύστημα περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση, χωρίς παραγώγους της εισόδου

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1y^{(1)}(t) + a_0y(t) = b_0u(t) \quad (3.43)$$

όπου $y(t)$ είναι η έξοδος, $u(t)$ είναι η είσοδος και οι αρχικές συνθήκες είναι μηδενικές, δηλαδή, $y^{(k)}(0) = 0$, $k = 0, \dots, n-1$.

Μετασχηματίζοντας κατά Laplace προκύπτει

$$s^n Y(s) + a_{n-1}s^{n-1}Y(s) + \dots + a_1sY(s) + a_0Y(s) = b_0U(s) \quad (3.44)$$

από την οποία προκύπτει η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} \quad (3.45)$$

Έστω τώρα η περίπτωση που το σύστημα περιγράφεται από μια διαφορική εξίσωση με παραγώγους της εισόδου

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0y(t) = b_m u^{(m)}(t) + b_{m-1}u^{(m-1)}(t) + \dots + b_0u(t) \quad (3.46)$$

$m \leq n$

και έστω ότι οι αρχικές συνθήκες είναι μηδενικές. Κατ' ανάλογο τρόπο αποδεικνύεται ότι η συνάρτηση μεταφοράς είναι

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} \quad (3.47)$$

3.4.2 Μετάβαση από τη συνάρτηση μεταφοράς στη διαφορική εξίσωση

Έστω ότι ένα σύστημα μιας εισόδου – μιας εξόδου περιγράφεται από τη συνάρτηση μεταφοράς

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} \quad (3.48)$$

Τότε, η διαφορική εξίσωση

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0y(t) = b_mu^{(m)}(t) + b_{m-1}u^{(m-1)}(t) + \dots + b_0u(t) \quad (3.49)$$

μπορεί να ληφθεί κατ' αντίστροφο τρόπο θέτοντας όπου s^k , την παράγωγο k τάξης, για $k = 0, \dots, n$ και όπου $Y(s)$, $U(s)$ τις $y(t)$, $u(t)$, αντίστοιχα.

3.4.3 Μετάβαση από τη συνάρτηση μεταφοράς στην κρουστική απόκριση

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, οι πίνακες μεταφοράς και κρουστικής απόκρισης συνδέονται μέσω του μετασχηματισμού Laplace από τις σχέσεις

$$G(s) = \mathcal{L}[g(t)] \quad (3.50)$$

και

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] \quad (3.51)$$

3.4.4 Μετάβαση από τις εξισώσεις κατάστασης στη συνάρτηση μεταφοράς

Έστω η περιγραφή κατάστασης

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (3.52)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Τότε, η συνάρτηση μεταφοράς δίνεται από τη σχέση

$$G(s) = C[(sI - A)^{-1}]B + D \quad (3.53)$$

3.4.5 Μετάβαση από τη συνάρτηση μεταφοράς στις εξισώσεις κατάστασης

Επειδή η περιγραφή κατάστασης δεν είναι μοναδική, σε αντίθεση με τις περιγραφές εισόδου – εξόδου, το πρόβλημα της μετάβασης από τη συνάρτηση μεταφοράς στις εξισώσεις κατάστασης, γνωστό ως **πρόβλημα πραγματοποίησης**, δεν επιδέχεται μία και μοναδική λύση. Ειδικότερα, τίθεται το πρόβλημα ύπαρξης λύσης, δηλαδή ύπαρξης μιας περιγραφής κατάστασης. Στην περίπτωση κατά την οποία η λύση υπάρχει, αντιμετωπίζεται το πρόβλημα της εύρεσης μιας περιγραφής που να χρησιμοποιεί τον ελάχιστο δυνατό αριθμό μεταβλητών κατάστασης, καθώς και τον ελάχιστο δυνατό αριθμό παραμέτρων. Δύο γνωστές περιπτώσεις πραγματοποίησης είναι οι εξής:

3.4.5. 1 Συστήματα μιας εισόδου – μιας εξόδου

Έστω ένα σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} \quad (3.54)$$

και έστω ότι ως μεταβλητές κατάστασης θα ληφθούν οι μεταβλητές φάσης. Τότε, η περιγραφή κατάστασης στην κανονική μορφή φάσης είναι

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) \quad (3.55)$$

$$y(t) = cx(t)$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = [b_0 \quad b_1 \quad \cdots \quad b_{n-1}] \quad (3.56)$$

3.4.5. 2 Συστήματα πολλών εισόδων – πολλών εξόδων

Έστω ένα σύστημα με πίνακα μεταφοράς

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & \cdots & G_{1m}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & \cdots & G_{2m}(s) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ G_{r1}(s) & G_{r2}(s) & \cdots & G_{rm}(s) \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

όπου $G_{ij}(s)$ είναι ρητές συναρτήσεις της μορφής

$$G_{ij}(s) = \frac{\gamma_{ij}(s)}{p_{ij}(s)} \quad (3.58)$$

Έστω επίσης ότι

$$p(s) = s^n + p_{n-1}s^{n-1} + \cdots + p_1s + p_0 \quad (3.59)$$

είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο (Ε.Κ.Π.) των $p_{ij}(s)$. Τότε, το γινόμενο $p(s)G(s)$ είναι ένας πίνακας του οποίου τα στοιχεία είναι πολυώνυμα του s και μπορεί να γραφεί με τη μορφή πολυωνύμου του s με συντελεστές πίνακες, δηλαδή

$$p(s)G(s) = G_{n-1}s^{n-1} + G_{n-2}s^{n-2} + \cdots + G_1s + G_0 \quad (3.60)$$

Τότε, η περιγραφή στο χώρο κατάστασης είναι της μορφής

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (3.61)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} 0_m & I_m & 0_m & \cdots & 0_m \\ 0_m & 0_m & I_m & \cdots & 0_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0_m & 0_m & 0_m & \cdots & I_m \\ -p_0 I_m & -p_1 I_m & -p_2 I_m & \cdots & -p_{n-1} I_m \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0_m \\ 0_m \\ \vdots \\ I_m \end{bmatrix}, \quad C = [H_0 \quad H_1 \quad \cdots \quad H_{n-1}] \quad (3.63)$$

0_m και I_m είναι, αντίστοιχα, ο μηδενικός και ο μοναδιαίος πίνακας με διαστάσεις $m \times m$. Οι άλλες διαστάσεις είναι: $x \in \mathbb{R}^{nm \times 1}$, $u \in \mathbb{R}^{m \times 1}$, $y \in \mathbb{R}^{r \times 1}$, $A \in \mathbb{R}^{nm \times nm}$, $B \in \mathbb{R}^{nm \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{r \times nm}$.

Παράδειγμα 3.4.1

Μια περιγραφή κατάστασης του συστήματος με συνάρτηση μεταφοράς

$$G(s) = \frac{s^2 + 4}{s^3 + 4s + 1}$$

είναι η εξής:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$$

$$y(t) = cx(t)$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -4 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = [4 \quad 0 \quad 1]$$

Παράδειγμα 3.4.2

Ζητείται μια περιγραφή στο χώρο κατάστασης του συστήματος με πίνακα μεταφοράς

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+2}{s(s+1)} & \frac{2s+4}{s(s+1)} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{2}{s+1} \end{bmatrix}$$

Λύση

Παρατηρούμε ότι ο αριθμός των εισόδων είναι $m=2$ και ο αριθμός των εξόδων είναι $r=2$. Το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών των στοιχείων της $G(s)$ είναι $p(s)=s^2+s$, βαθμού $n=2$, του οποίου οι συντελεστές είναι $p_0=0$ και $p_1=1$. Επίσης,

$$p(s)G(s) = \begin{bmatrix} s+2 & 2s+4 \\ s & 2s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = sG_1 + G_0$$

Η διάσταση του $x(t)$ είναι $nm \times 1 = 4 \times 1$. Άρα έχουμε την περιγραφή κατάστασης

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

με

$$A = \begin{bmatrix} 0_2 & I_2 \\ -p_0 I_2 & -p_1 I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = [H_0 \quad H_1] = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

3.5 Επίλυση εξισώσεων κατάστασης

Από τις εξισώσεις κατάστασης της μορφής

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

(3.64)

$$x(t_0) = x_0$$

είναι δυνατόν να προκύψει η τιμή του διανύσματος κατάστασης $x(t)$. Αυτό είναι επιθυμητό, τόσο σε προβλήματα ανάλυσης, προκειμένου να μελετηθεί η συμπεριφορά των μεταβλητών κατάστασης, όσο και σε προβλήματα σύνθεσης, προκειμένου να υλοποιηθεί η ανάδραση κατάστασης.

Για το σκοπό αυτό απαιτείται η επίλυση των εξισώσεων κατάστασης, οι οποίες είναι γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης. Αποδεικνύεται ότι η λύση $x(t)$ δίνεται από τη σχέση

$$x(t) = \Phi(t-t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau \quad (3.65)$$

- Ο πρώτος όρος είναι η λύση του **ομογενούς συστήματος**, δηλαδή του συστήματος

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad (3.66)$$

που ισχύει για την περίπτωση μηδενικής εισόδου.

- Ο δεύτερος όρος είναι η λύση του **μη ομογενούς συστήματος**.
- Ο πίνακας $\Phi(t-t_0) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ λέγεται **μεταβατικός πίνακας** κατάστασης και ικανοποιεί την ομογενή εξίσωση, δηλαδή

$$\dot{\Phi}(t-t_0) = A\Phi(t-t_0) \quad (3.68)$$

Ο μεταβατικός πίνακας υπολογίζεται από τη σχέση

$$\Phi(t-t_0) = e^{A(t-t_0)} = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}] \quad (3.69)$$

Είναι φανερό ότι ο $\Phi(t-t_0)$ εξαρτάται μόνο από τον πίνακα κατάστασης A και παριστά την **ελεύθερη απόκριση** του συστήματος (ή απόκριση μηδενικής διέγερσης), δηλαδή αυτή που προκύπτει όταν το σύστημα διεγείρεται μόνο από τις αρχικές του συνθήκες. Επιπλέον, ο πίνακας $\Phi(t-t_0)$ προσδιορίζει πλήρως τη «μετάβαση» του διανύσματος κατάστασης από την αρχική του τιμή $x(t_0)$ σε μια οποιαδήποτε τιμή $x(t)$, σύμφωνα με τη σχέση

$$x(t) = \Phi(t-t_0)x(t_0) \quad (3.70)$$

Ο μεταβατικός πίνακας χαρακτηρίζεται από τις παρακάτω ιδιότητες:

$$1. \Phi(0) = I \quad (3.71)$$

$$2. \Phi^{-1}(t) = \Phi(-t) \quad (3.72)$$

$$3. \Phi(t_2-t_1)\Phi(t_1-t_0) = \Phi(t_2-t_0), \quad \forall t_0, t_1, t_2 \quad (3.73)$$

$$4. [\Phi(t)]^k = \Phi(kt) \quad (3.74)$$

3.5.1 Υπολογισμός του μεταβατικού πίνακα

Για τον αριθμητικό υπολογισμό του μεταβατικού πίνακα έχουν αναπτυχθεί οι παρακάτω μέθοδοι:

1^η μέθοδος: Χρησιμοποιούμε τη σχέση

$$\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}] \quad (3.75)$$

όπου για τον υπολογισμό του $(sI - A)^{-1}$ χρησιμοποιείται ο αλγόριθμος του Leverrier

$$(sI - A)^{-1} = \frac{s^{n-1}F_1 + s^{n-2}F_2 + \dots + sF_{n-1} + F_n}{s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n} \quad (3.76)$$

όπου

$$\begin{array}{ll} F_1 = I & a_1 = -tr(AF_1) \\ F_2 = AF_1 + a_1I & a_2 = -\frac{1}{2}tr(AF_2) \\ \vdots & \vdots \\ F_n = AF_{n-1} + a_{n-1}I & a_n = -\frac{1}{n}tr(AF_n) \end{array} \quad (3.77)$$

2^η μέθοδος: Βασίζεται στη διαγωνοποίηση του πίνακα κατάστασης A . Όπως είναι γνωστό, αν ο πίνακας A έχει διακεκριμένες ιδιοτιμές, τότε ο πίνακας M των ιδιοδιανυσμάτων του διαγωνοποιεί τον A , δηλαδή,

$$\Lambda = M^{-1}AM \quad (3.78)$$

όπου Λ είναι ο διαγώνιος πίνακας ιδιοτιμών του A . Έστω ότι $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ είναι οι ιδιοτιμές αυτές. Τότε ισχύει

$$\Phi(t) = e^{At} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

3^η μέθοδος: Βασίζεται στην ανάπτυξη του e^{At} σε δυναμοσειρά

$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + \dots \quad (3.80)$$

και υπολογισμό των επί μέρους όρων.

Παράδειγμα 3.5.1

Ζητείται να βρεθεί η γενική λύση των εξισώσεων κατάστασης

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u(t) = 1, \quad t_0 = 0$$

Λύση

Υπολογίζεται ο $\Phi(t-t_0) = \Phi(t-0) = \Phi(t)$ από την πρώτη μέθοδο. Έχουμε

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-2}{(s+1)(s+2)} & \frac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

$$\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}[\Phi(s)] = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Η λύση της ομογενούς είναι $x(t) = \Phi(t)x(0)$ και επομένως

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \Phi(t) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} - e^{-2t} \\ -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Η λύση της μη ομογενούς είναι

$$\begin{aligned} \int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau &= \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} \\ -e^{-(t-\tau)} + 2e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix} u(\tau)d\tau = \\ &= \begin{bmatrix} e^{-t} \int_0^t e^{\tau} d\tau - e^{-2t} \int_0^t e^{2\tau} d\tau \\ -e^{-t} \int_0^t e^{\tau} d\tau + 2e^{-2t} \int_0^t e^{2\tau} d\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t}(e^t - 1) - \frac{1}{2}e^{-2t}(e^{2t} - 1) \\ -e^{-t}(e^t - 1) + e^{-2t}(e^{2t} - 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Άρα, η γενική λύση είναι

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} - e^{-2t} + \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \\ -e^{-t} + 2e^{-2t} + e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix}$$

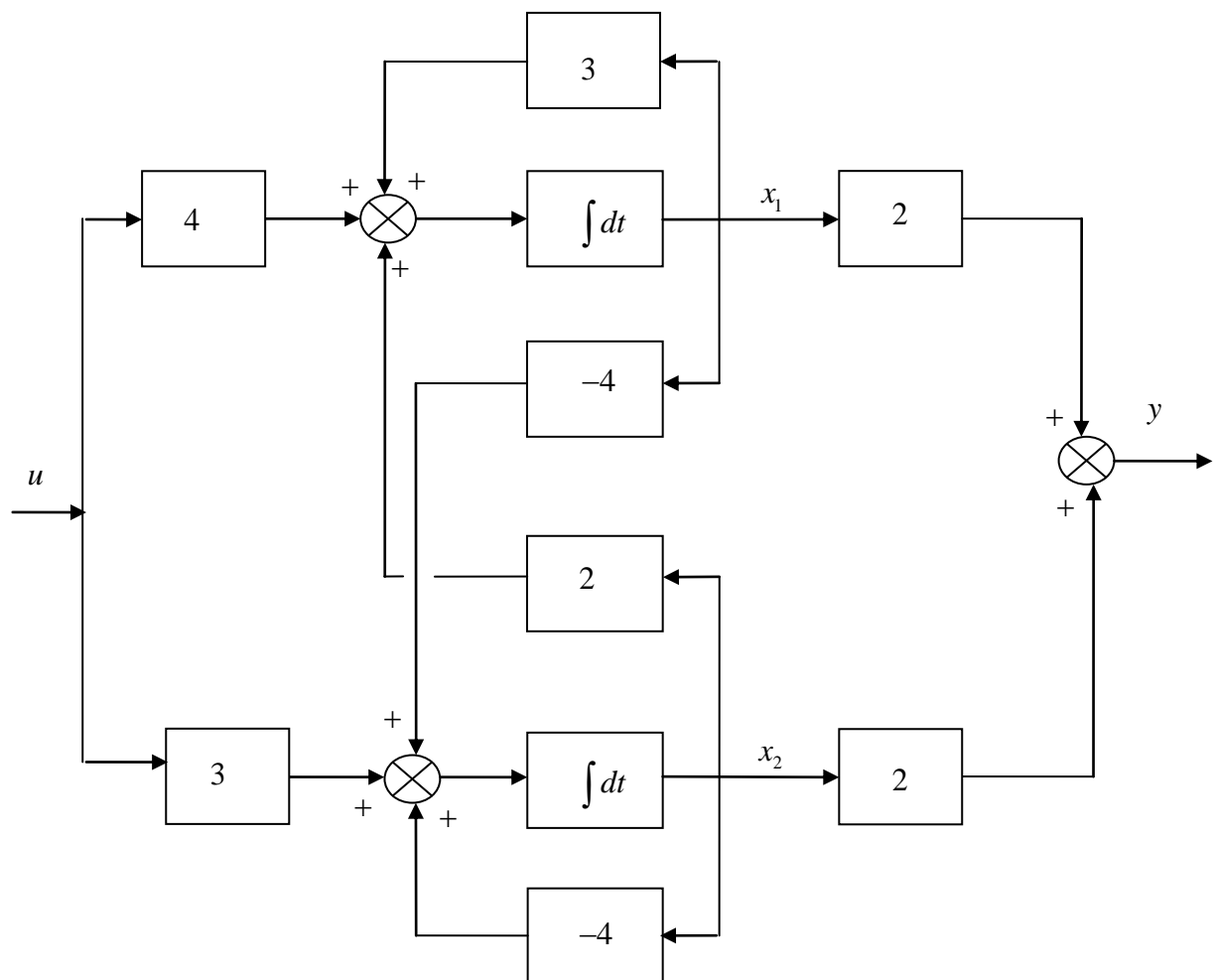
3.6 Κύρια σημεία

- Μεταβλητές κατάστασης, διάνυσμα κατάστασης, εξισώσεις κατάστασης
- Περιγραφές κατάστασης φυσικών συστημάτων
- Μετασχηματισμοί διανύσματος κατάστασης – κανονική μορφή φάσης
- Μετάβαση από περιγραφή σε περιγραφή
- Επίλυση εξισώσεων κατάστασης – μεταβατικός πίνακας

3.7 Ασκήσεις Κεφαλαίου 3

Άσκηση 3.1

Να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς του παρακάτω συστήματος



Λύση

Οι εξισώσεις του συστήματος είναι

$$\dot{x}_1 = \int (4u + 3x_1 + 2x_2) dt$$

$$\dot{x}_2 = \int (3u - 4x_1 - 4x_2) dt$$

$$2x_1 + 2x_2 = y$$

Παραγωγίζοντας τις δύο πρώτες εξισώσεις προκύπτει

$$\dot{x}_1 = 3x_1 + 2x_2 + 4u$$

$$\dot{x}_2 = -4x_1 - 4x_2 + 3u$$

$$y = 2x_1 + 2x_2$$

Οι εξισώσεις κατάστασης του συστήματος γράφονται σε διανυσματική μορφή ως εξής:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Ή αλλιώς

$$\dot{x} = Ax + bu$$

$$y = Cx$$

Η συνάρτηση μεταφοράς δίνεται από τον τύπο

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}b = \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s-3 & -2 \\ 4 & s+4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{\det(sI - A)} \begin{bmatrix} s+4 & 2 \\ -4 & s-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{(s-3)(s+4)+8} \begin{bmatrix} 4(s+4)+6 \\ -16+3(s-3) \end{bmatrix} = \dots$$

$$H(s) = \frac{14s-6}{s^2+s-4}$$

Άσκηση 3.2

Να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος με περιγραφή χώρου κατάστασης

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_4 \\ \dot{x}_3 &= -3x_2 - 2x_3 + u_1 \\ \dot{x}_4 &= -x_2 - 2x_3 + u_2\end{aligned}$$

Λύση

Έχουμε

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$H(s) = (sI - A)^{-1}B = \dots = \frac{1}{s^4 + 2s^3 + s^2 - 4s} \begin{bmatrix} s^2 + 1 & -3 \\ -2s & s + 2 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 3.3

Να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -4 & 2 \\ 3 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 1 \quad 0], \quad D = [0 \quad 0]$$

Λύση

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \dots = \begin{bmatrix} \frac{s+2}{(s+1)^2(s+2)} & \frac{-4}{(s+1)^2(s+2)} \end{bmatrix}$$

Άσκηση 3.4

Να βρεθεί μία περιγραφή κατάστασης των παρακάτω συναρτήσεων μεταφοράς

$$(α) \quad H(s) = \frac{2s+1}{s^4 + 4s^3 + 2s^2 + s + 5}$$

Λύση

$$b_0=1, \quad b_1=2, \quad a_0=5, \quad a_1=1, \quad a_2=2, \quad a_3=4, \quad a_4=1$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -5 & -1 & -2 & -4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = [1 \quad 2 \quad 0 \quad 0]$$

$$(\beta) \quad H(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{2}{s+2} \end{bmatrix}$$

Λύση

$$\text{Διαστάσεις } H(s): \quad p \times m, \quad p=1, \quad m=2$$

$$p(s) = (s+1)(s+2) = s^2 + 3s + 2$$

$$n=2, \quad p_0=2, \quad p_1=3$$

$$\text{Διάσταση } x: \quad nm \times 1 = 4 \times 1$$

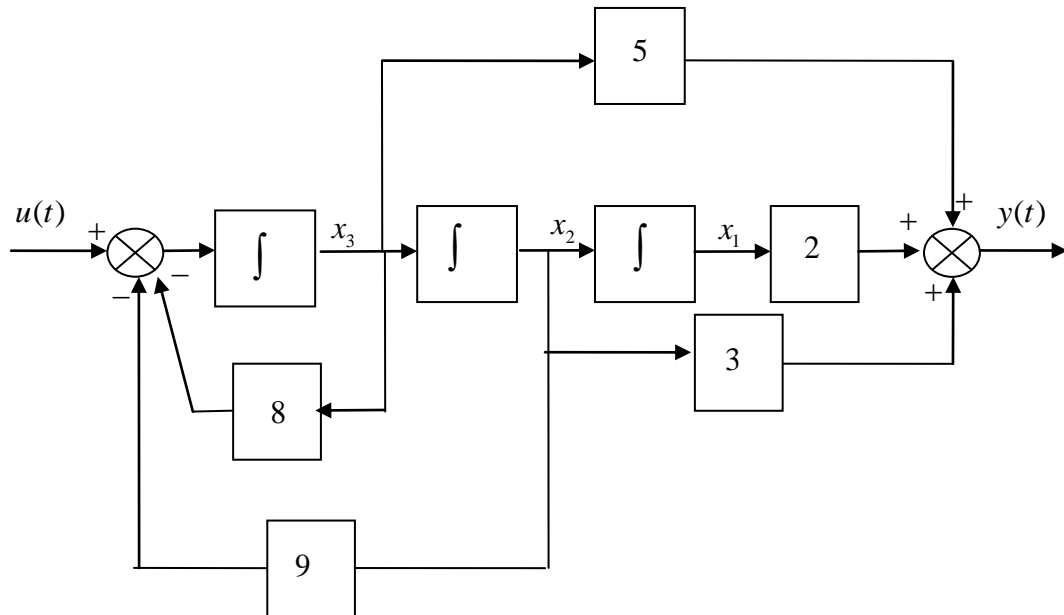
$$p(s)H(s) = [s+2 \quad 2(s+1)] = s[1 \quad 2] + [2 \quad 2] = sH_1 + H_0$$

$$A = \begin{bmatrix} O_2 & I_2 \\ -2I_2 & -3I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} O_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C = [H_0 \quad H_1] = [2 \quad 2 \quad 1 \quad 2]$$

Άσκηση 3.5

Δίνεται το σύστημα



Ζητείται να βρεθεί η περιγραφή κατάστασης του συστήματος.

Λύση

Από το διάγραμμα βαθμίδων του συστήματος προκύπτει

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = x_3(t)$$

$$\dot{x}_3(t) = -9x_2(t) - 8x_3(t) + u(t)$$

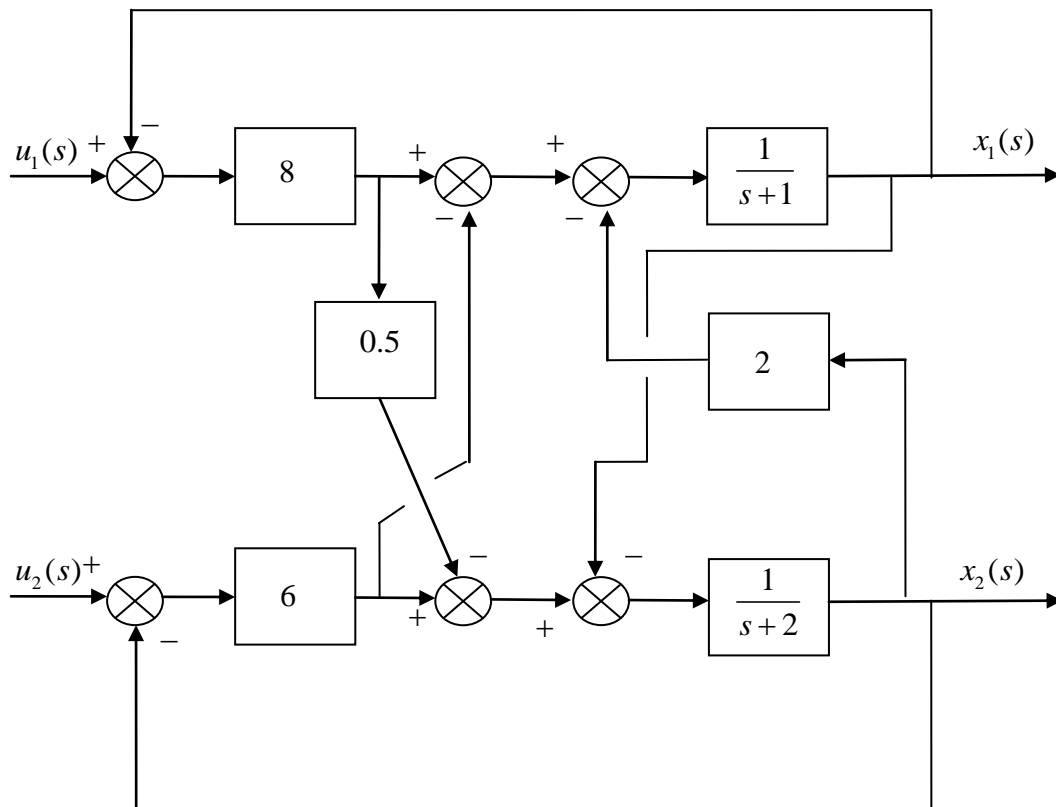
$$y(t) = 2x_1(t) + 3x_2(t) + 5x_3(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -9 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u(t)$$

Άσκηση 3.6

Δίνεται το σύστημα



Να βρεθεί η περιγραφή κατάστασης του συστήματος.

Λύση

Από το διάγραμμα βαθμίδων προκύπτει

$$\left. \begin{aligned} x_1(s) &= \left(\frac{1}{s+1} \right) \left[8(u_1(s) - x_1(s)) - 6(u_2(s) - x_2(s)) - 2x_2(s) \right] \\ x_2(s) &= \left(\frac{1}{s+2} \right) \left[6(u_2(s) - x_2(s)) - 4(u_1(s) - x_1(s)) - x_1(s) \right] \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} (s+1)x_1(s) &= 8u_1(s) - 8x_1(s) - 6u_2(s) + 6x_2(s) - 2x_2(s) \\ (s+2)x_2(s) &= 6u_2(s) - 6x_2(s) - 4u_1(s) + 4x_1(s) - x_1(s) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

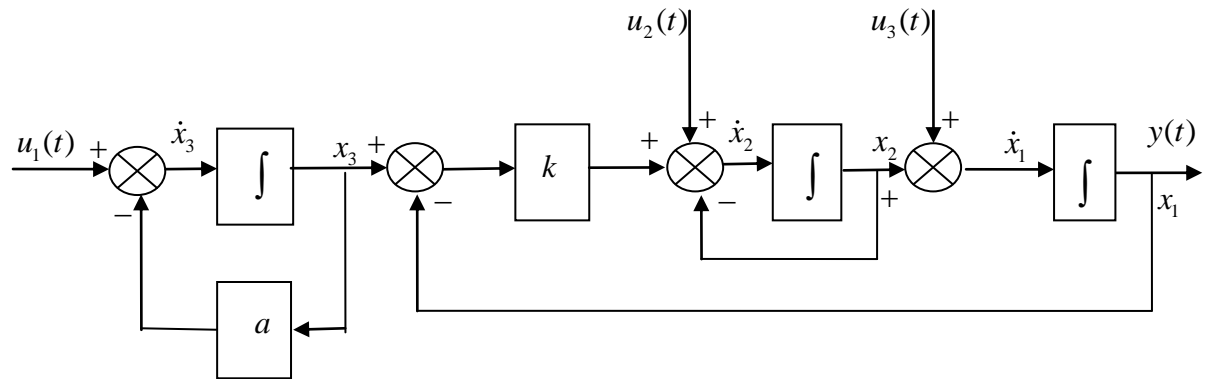
$$\left. \begin{aligned} sx_1(s) &= -9x_1(s) + 4x_2(s) + 8u_1(s) - 6u_2(s) \\ sx_2(s) &= 3x_1(s) - 8x_2(s) - 4u_1(s) + 6u_2(s) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -9x_1(t) + 4x_2(t) + 8u_1(t) - 6u_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= 3x_1(t) - 8x_2(t) - 4u_1(t) + 6u_2(t) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 4 \\ 3 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & -6 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

Άσκηση 3.7

Δίνεται το σύστημα του σχήματος



Ζητείται να βρεθεί η περιγραφή κατάστασης του συστήματος.

Λύση

Από το διάγραμμα βαθμίδων του συστήματος προκύπτει

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) + u_3(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -kx_1(t) - x_2(t) + kx_3(t) + u_2(t)$$

$$\dot{x}_3(t) = -ax_3(t) + u_1(t)$$

$$y(t) = x_1(t)$$

Υπό μορφή πινάκων γράφεται

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -k & -1 & k \\ 0 & 0 & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

Άσκηση 3.8

Δίνεται το σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t)$$

Όπου $r(t)=1$, $(r(t)=u_s(t))$, $t \geq 0$.

Να βρεθεί το διάνυσμα κατάστασης για $t \geq 0$.

Λύση

$$\text{Είναι } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix},$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{s(s+3)+2} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-2}{(s+1)(s+2)} & \frac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

$$\Phi(t) = L^{-1}[(sI - A)^{-1}] = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$x(t) = \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)Br(\tau)d\tau =$$

$$\begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} x(0) + \int_0^t \begin{bmatrix} 2e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} & e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} \\ -2e^{-(t-\tau)} + 2e^{-2(t-\tau)} & -e^{-(t-\tau)} + 2e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} d\tau =$$

$$\begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} x(0) + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Άσκηση 3.9

Να βρεθεί ο μεταβατικός πίνακας και ο αντίστροφός του, όταν

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$$

Λύση

$$\Phi(t) = e^{At} = L^{-1}[(sI - A)^{-1}]$$

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & -3 \\ 1 & s+4 \end{bmatrix},$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{s(s+4)+3} \begin{bmatrix} s+4 & 3 \\ -1 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s+4}{(s+1)(s+3)} & \frac{3}{(s+1)(s+3)} \\ \frac{-1}{(s+1)(s+3)} & \frac{s}{(s+1)(s+3)} \end{bmatrix}$$

$$\Phi(t) = L^{-1}[(sI - A)^{-1}] = L^{-1} \begin{bmatrix} \frac{3/2}{s+1} - \frac{1/2}{s+3} & \frac{3/2}{s+1} - \frac{3/2}{s+3} \\ \frac{-1/2}{s+1} + \frac{1/2}{s+3} & \frac{-1/2}{s+1} + \frac{3/2}{s+3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t} & \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{3}{2}e^{-3t} \\ \frac{-1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-3t} & \frac{-1}{2}e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-3t} \end{bmatrix}$$

Ιδιότητα του μεταβατικού πίνακα: $\Phi^{-1}(t) = \Phi(-t)$. Επομένως,

$$\Phi^{-1}(t) = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{3t} & \frac{3}{2}e^t - \frac{3}{2}e^{3t} \\ \frac{-1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{3t} & \frac{-1}{2}e^t + \frac{3}{2}e^{3t} \end{bmatrix}$$

Άσκηση 3.10

Να βρεθεί η ελεύθερη απόκριση του συστήματος

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

με αρχικές συνθήκες $x_1(0) = 1, x_2(0) = -1$.

Λύση

$$sI - A = \begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ -1 & s-1 \end{bmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{(s-1)^2} \begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ 1 & s-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & 0 \\ \frac{1}{(s-1)^2} & \frac{1}{s-1} \end{bmatrix}$$

$$\Phi(t) = L^{-1}[(sI - A)^{-1}] = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ te^t & e^t \end{bmatrix} = e^{At}$$

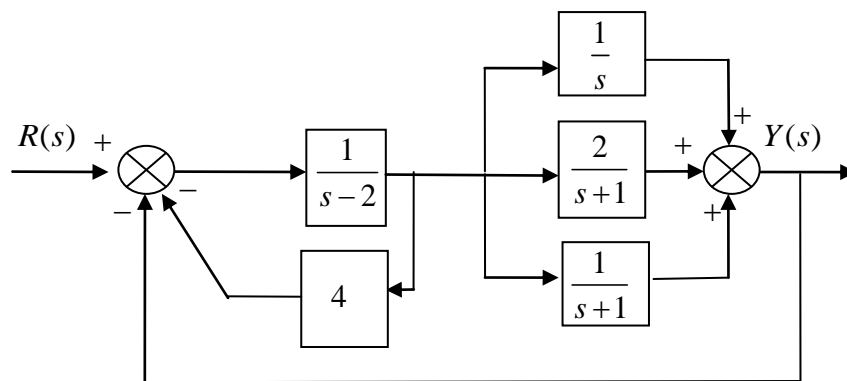
Ελεύθερη απόκριση:

$$x(t) = \Phi(t)x(0) = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ te^t & e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t \\ te^t - e^t \end{bmatrix}$$

Άλυτες ασκήσεις

Άσκηση Α3.1

Δίνεται το παρακάτω διάγραμμα βαθμίδων



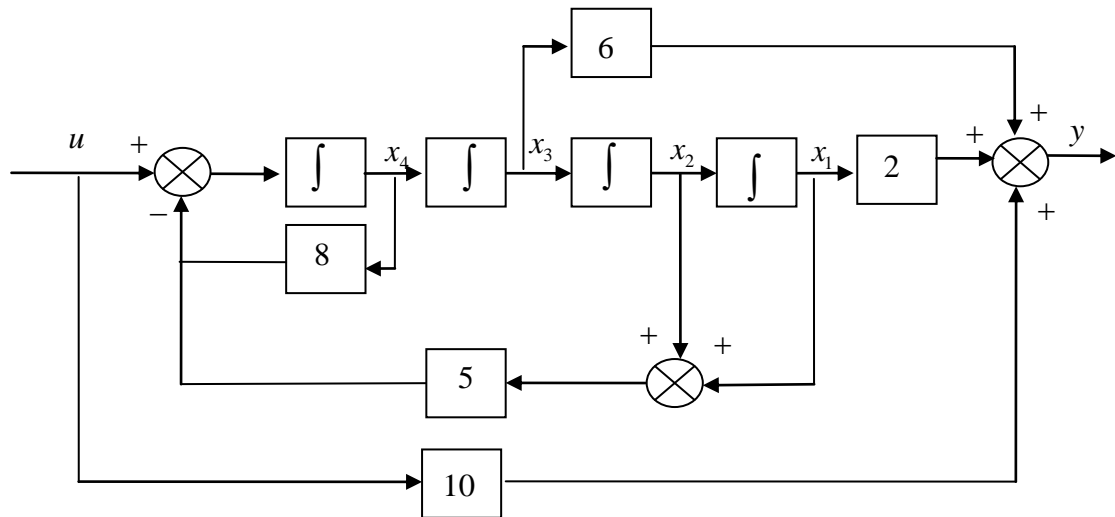
Ζητείται να βρεθεί μία περιγραφή κατάστασης κανονικής μορφής φάσης, της μορφής

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

Άσκηση Α3.2

Δίνεται το σύστημα του παρακάτω σχήματος



Όπου $u(t)$ είναι η είσοδος, $y(t)$ η έξοδος και $x_i(t)$, $i = 1, \dots, 4$ είναι οι μεταβλητές κατάστασης.

Να βρεθούν:

1. Οι εξισώσεις κατάστασης και η εξίσωση εξόδου σε διανυσματική μορφή
2. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος

Άσκηση Α3.3

Δίνεται το σύστημα σε περιγραφή χώρου κατάστασης

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ a & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1. Να βρεθεί η περιγραφή κανονικής μορφής φάσης
2. Από τη μορφή αυτή να βρεθεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος

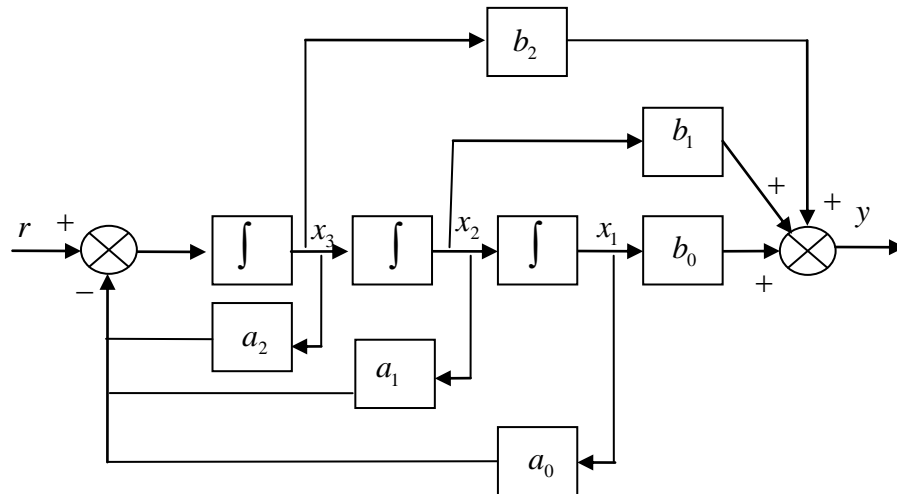
Άσκηση Α3.4

Να βρεθεί μία περιγραφή κατάστασης για την παρακάτω συνάρτηση μεταφοράς

$$H(s) = \left[\frac{3s}{(s+1)(s+2)} \quad \frac{K}{s+a} \right], \quad K > 0, \quad a > 0$$

Άσκηση Α3.5

Δίνεται το σύστημα του παρακάτω σχήματος



1. Να βρεθεί η περιγραφή χώρου κατάστασης
2. Ποιο θα είναι το διάγραμμα βαθμίδων και η αντίστοιχη περιγραφή χώρου κατάστασης, όταν $b_0 = 3$, $b_1 = b_2 = 0$, $a_0 = 2$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$
3. Για τη μορφή αυτή να βρεθεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο